

Détermination de matrice semblable Metzler par optimisation non lisse

Emmanuel Chambon¹, Pierre Apkarian¹ and Laurent Burlion¹

(JDMACS 2015)

Submitted 23/01/2015, published 18/06/2015.

Author version last modified 10/11/2015.

Abstract: *La conception d'observateurs par intervalles repose sur la possibilité de rendre un système coopératif. Dans le cas linéaire, un système coopératif est un système dont la matrice d'état est à coefficients hors-diagonaux positifs. La littérature propose un certain nombre de méthodes pour concevoir des observateurs par intervalles sur des systèmes non coopératifs. Ces méthodes sont basées sur des changements de variables, le système étudié devenant coopératif dans les nouvelles coordonnées. Dans cet article, une méthode complémentaire au formalisme existant est présentée qui permet la détermination numérique de cette transformation sans hypothèse préalable. Elle repose sur une reformulation en problème de synthèse de loi de commande sur une collection de modèles. Le problème équivalent est alors résolu en faisant appel à une technique d'optimisation non lisse conçue pour ce type de problème de synthèse. L'approche est testée sur deux exemples extraits de la littérature.*

Keywords: *Observateurs par intervalles, optimisation non lisse, matrice Metzler*

1 Introduction

Les systèmes coopératifs sont des systèmes dont la matrice Jacobienne est à coefficients hors-diagonaux positifs – aussi dite Metzler. Dans le cas de systèmes linéaires, cela revient à considérer leur matrice d'état. Ces systèmes présentent la propriété intéressante de conserver l'ordre partiel entre leurs trajectoires [1, 2]. Cet intérêt est exploité dans le cadre des observateurs par intervalles qui consistent à encadrer à tous instants et de manière déterministe l'état d'un système, ce dernier étant soumis à des entrées de perturbation inconnues mais supposées bornées et à bornes connues. Par exemple, étant donnée une perturbation inconnue sur la mesure $\underline{\Phi}(t) \leq \Phi(t) \leq \overline{\Phi}(t)$, un observateur par intervalles fournit deux états $(\underline{x}(t), \overline{x}(t))$ tels que $\forall t, \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t)$. Les observateurs par intervalles pour des systèmes coopératifs ont notamment été étudiés dans [3]. Cependant, peu de systèmes physiques réels sont coopératifs. Une solution est de rendre de tels systèmes coopératifs en choisissant un changement de coordonnées adapté. Suite aux travaux présentés dans [4], un changement de variables dépendant du temps a été proposé dans [5] pour des systèmes *LTI* non coopératifs. Malgré l'intérêt théorique et les garanties de convergence de l'observateur, ces travaux sont complexes à mettre en œuvre sur des systèmes physiques réels et sont difficilement automatisables au sein d'un algorithme dédié notamment à cause de la dépendance de la structure au nombre de valeurs propres complexes.

Des travaux plus récents comme [6, 7] ou [8] proposent un formalisme différent reposant sur un changement de coordonnées constant. Ces résultats reposent sur l'existence d'un couple de matrices (P, L) tel que la matrice $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler. Dans certains cas cette existence est une hypothèse préalable à l'application de la méthode. Dans le cas de [6], une approche basée sur la résolution d'une équation de Sylvester est proposée qui nécessite la définition préalable d'une matrice M désirée, ce qui peut réduire l'ensemble des solutions acceptables. Dans cet article, nous proposons une alternative à ces techniques de détermination d'une matrice semblable à la matrice $A - LC$ qui

¹Département de Commande des Systèmes et Dynamique du Vol – Onera, Centre de Toulouse, 2 Avenue Édouard Belin, 31000 Toulouse, France, emmanuel.chambon@onera.fr

soit Metzler. En utilisant des outils d'optimisation non lisse, nous procédons au calcul simultané des matrices P et L et obtenons ainsi la matrice Metzler $M = P(A - LC)P^{-1}$ *a posteriori*.

Les techniques d'optimisation non lisse utilisées dans cet article ont été conçues dans le cadre de la synthèse de commande structurée sous contraintes qui est un problème non convexe [9], [10]. Des développements plus récents de ces approches [11] permettent également la synthèse de contrôleur sous contraintes multiples faisant référence à des modèles distincts. Les contraintes à vérifier peuvent par exemple porter sur le lieu des pôles en boucle fermée ou sur le rejet d'une perturbation donnée. Dans notre approche, de telles contraintes seront utilisées pour assurer une qualité d'estimation minimale par l'intermédiaire du gain d'observation L . Nous allons également montrer que le problème de trouver (P, L) telles que $P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler peut se reformuler comme un problème de stabilisation d'un ensemble de modèles. Par optimisation non lisse, nous proposons alors une solution numérique à ce problème.

L'organisation de cet article est la suivante. Après avoir détaillé les notations et définitions utilisées dans la section 2, le formalisme des observateurs par intervalles est introduit dans la section 3. Au vu des hypothèses faites dans cette section, nous formulons le problème complet de la détermination d'une matrice Metzler et du rejet de perturbation de l'étage d'estimation dans la section 4. En utilisant une méthode d'optimisation non lisse permettant de résoudre le problème introduit dans la section 5, une solution est proposée dans la section 6. L'application de cette approche à deux exemples est présentée dans la section 7 avant de conclure à la section 8.

2 Définitions et notations

La variable de Laplace est notée s et $T_{w \rightarrow z}(s)$ désigne la fonction de transfert entre l'entrée w et la sortie z . Étant donnés deux entiers (i, j) , on définit le symbole δ_{ij} par

$$\forall (i, j), \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Sauf mention contraire, i et j désignent des entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ où (n, m) sont les dimensions d'une matrice. On note la matrice identité $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pour une matrice $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, on note $\max(P, 0)$ la matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$ ayant pour coefficients $[\max(p_{ij}, 0)]_{ij}$. On introduit la définition d'une matrice Metzler :

Définition 1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On dit que A est une matrice Metzler si et seulement si

$$\forall i \neq j, a_{ij} \geq 0 \quad (2)$$

A est également une matrice Hurwitz si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

Définition 2. Étant données deux matrices $(A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{m \times n})$, on appelle matrices de transformation en matrice Metzler le couple de matrices (P, L) avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tel que $P(A - LC)P^{-1}$ soit une matrice Metzler.

Hypothèse 1. Soit un système G de représentation d'état (A, B, C, D) . On suppose dans cet article que les modes inobservables de G sont stables.

D'après l'hypothèse 1, il existe donc L tel que $A - LC$ soit Hurwitz.

3 Observateurs par intervalles

Dans cette partie, nous développons le formalisme des observateurs par intervalles lorsque l'on a accès à une estimation de l'état *via* un observateur classique. Ceci nous amènera à considérer les raisons qui motivent le développement d'une méthode de synthèse de matrices de transformation d'une matrice d'état en matrice Metzler. Nous nous inspirons des formalismes présentés dans [5], [6] et [8].

3.1 Représentation d'état du système

Nous considérons un système dont la représentation d'état est donnée par :

$$(G) \begin{cases} \dot{x} &= Ax + [0_{n \times 1} \quad B_u] \begin{pmatrix} \Phi \\ u \end{pmatrix} \\ y &= Cx + [D_\Phi \quad 0_{m \times 1}] \begin{pmatrix} \Phi \\ u \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Les conditions initiales sont données par le vecteur x_0 pour lequel on connaît $(\underline{x}_0, \bar{x}_0)$ tels que $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$. On désigne par $u \in \mathbb{R}$ l'entrée de commande et par $\Phi \in \mathbb{R}$ une perturbation inconnue de la mesure. Il est aussi possible de considérer des systèmes avec perturbation d'état pour lesquels une approche similaire est envisageable. Nous supposons connaître deux bornes $(\underline{\Phi}, \bar{\Phi})$ telles que $\forall t, \underline{\Phi}(t) \leq \Phi(t) \leq \bar{\Phi}(t)$. Nous supposons également qu'un contrôleur $K(s)$ a été synthétisé qui assure la stabilité du système pour $u = K(s)y$. Pour un système d'état x , concevoir un observateur par intervalles consiste à trouver deux systèmes d'états respectifs (\underline{x}, \bar{x}) tels que $\forall t, \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$.

3.2 Observateur classique

Nous considérons l'observateur de Luenberger suivant :

$$(G_{\text{obs}}) \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Compte tenu de la présence d'une perturbation sur la mesure, l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ est définie par le système suivant :

$$\dot{e} = (A - LC)e - LD_\Phi \Phi(t) \quad (5)$$

dont la condition initiale e_0 est bornée par $\underline{e}_0 = \underline{x}_0 - \hat{x}_0$ et $\bar{e}_0 = \bar{x}_0 - \hat{x}_0$. En utilisant notre connaissance des bornes de la perturbation Φ , nous allons définir un observateur par intervalles de l'erreur d'estimation.

3.3 Observateur par intervalles de l'erreur d'estimation

Hypothèse 2. *Il existe (P, L) telles que $P(A - LC)P^{-1}$ soit Hurwitz Metzler.*

Soient $P_p = \max(P, 0)$, $P_n = P_p - P$, $S = P^{-1}$, $S_p = \max(S, 0)$, $S_n = S_p - S$, $P_p^L = \max(PLD_\Phi, 0)$ et $P_n^L = P_p^L - PLD_\Phi$. En utilisant l'approche présentée dans [6] tout en restant dans les coordonnées d'origine comme effectué dans [8], on vérifie que le système

$$(G_{\text{int}}) \begin{cases} \dot{\underline{e}} &= (A - LC)\underline{e} + S(P_p^L \underline{\Phi} - P_n^L \bar{\Phi}) \\ \dot{\bar{e}} &= (A - LC)\bar{e} + S(P_p^L \bar{\Phi} - P_n^L \underline{\Phi}) \\ \underline{e}_0 &= S(P_p \underline{e}_0 - P_n \bar{e}_0) \\ \bar{e}_0 &= S(P_p \bar{e}_0 - P_n \underline{e}_0) \end{cases} \quad (6)$$

est un observateur par intervalles du système (5) si l'on considère le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \underline{e} &= S_p P \underline{\hat{e}} - S_n P \bar{\hat{e}} \\ \bar{e} &= S_p P \bar{\hat{e}} - S_n P \underline{\hat{e}} \end{cases} \quad (7)$$

On obtient donc :

$$\forall t, \underline{e}(t) \leq e(t) \leq \bar{e}(t) \quad (8)$$

3.4 Observateur par intervalles de l'état

En utilisant le fait que $e = x - \hat{x}$ et en tablant sur notre connaissance de l'estimée de l'état à chaque instant, on obtient :

$$\forall t, \underline{e}(t) + \hat{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{e}(t) + \hat{x}(t) \quad (9)$$

3.5 Remarques

Deux remarques peuvent être faites sur ce formalisme :

- l'hypothèse 2 peut être difficile à satisfaire *à la main* dans le cas d'un système présentant un nombre d'états $n > 3$. Se pose alors la question de la détermination aisée de matrices P et L adéquates;
- Il est recommandé de chercher à garantir une bonne qualité d'estimation par l'intermédiaire du gain d'observation L afin d'obtenir un encadrement aussi précis que possible de l'état du système.

4 Formulation du problème

Suite à ces remarques, nous nous intéressons au problème suivant :

Problème 1. Soit le système G de l'Eq. (3) ayant pour représentation d'état (A, B_u, C, D_Φ) , pour état $x \in \mathbb{R}^n$ et pour vecteur de mesures $y \in \mathbb{R}^m$. On suppose que ce système vérifie l'hypothèse 1. Trouver les matrices de transformation en matrice Metzler (P, L) telles que :

(a) $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Hurwitz Metzler;

(b) la norme H_2 du transfert $T_{\Phi \rightarrow x - \hat{x}}(s)$ vérifie

$$\left\| \frac{1}{m_A} T_{\Phi \rightarrow x - \hat{x}}(s) \right\|_2 \leq 1$$

où $m_A \in \mathbb{R}$ permet de pondérer le transfert étudié.

Dans la section 6, nous montrons que ce problème peut être résolu par une méthode d'optimisation non lisse pensée à l'origine pour la synthèse de loi de commande.

5 Synthèse H_∞ par optimisation non lisse

On considère le problème de synthèse de loi de commande structurée suivant :

Problème 2. Soit $C(s, p)$ un ensemble de systèmes linéaires invariants dépendant de paramètres réglables p . Soient w et z les vecteurs d'entrées et sorties de synthèse décrivant les transferts à contraindre. Trouver p tel que :

$$\min_p \max_{i=1, \dots, n_{faibles}} \{ \| T_{w_i \rightarrow z_i}(C(s, p)) \|_{2/\infty} \} \quad (10)$$

sous contraintes $\| T_{w_j \rightarrow z_j}(C(s, p)) \|_{2/\infty} \leq 1$ où $j = 1, \dots, n_{fortes}$.

Le fait de structurer un contrôleur rend le problème de synthèse H_∞ non convexe. Pour résoudre ce type de problème, on a recours à des techniques d'optimisation non lisse telles que présentées dans [11]. Ces techniques ont été implémentées dans un solveur numérique présenté dans [12]. Plus précisément, il est possible d'utiliser la routine `systeme` de MATLAB© fournie avec la *Robust Control Toolbox* depuis sa version 2012b.

Une solution optimale localement à ce problème est obtenue quand l'algorithme parvient à vérifier les contraintes *fortes* tout en minimisant les contraintes *faibles* (aussi appelées contraintes *objectifs*).

6 Solution

Nous détaillons dans cette section la formulation sous forme de problème de synthèse de loi de commande. Il est intéressant de noter au préalable qu'il existe une solution triviale au sous-problème (a) du problème 1.

6.1 Existence d'une solution triviale au sous-problème (a)

Supposons que (A, C) soit observable. On choisit L par placement de pôles tel que les pôles de $A - LC$ soient distincts, réels et stables. Soit P la matrice des vecteurs propres à droite de la matrice $A - LC$. Alors la matrice $M = P^{-1}(A - LC)P$ est Hurwitz Metzler.

Preuve 1. *Les matrices diagonales satisfont à la définition 1 d'une matrice Metzler.* \square

Il est cependant important de noter que cette solution peut conduire à des gains L inappropriés, en particulier qui ne satisfont pas le sous-problème (b). Il peut également être souhaitable de conserver des pôles complexes pour un observateur mis en œuvre sur un système physique auquel cas cette solution triviale ne convient pas.

6.2 Note sur la méthode par équation de Sylvester

Comme suggéré dans [6], la recherche des matrices P et L telles que $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler peut se formuler comme la résolution de l'équation de Sylvester suivante :

$$PA - MP = QC \quad (11)$$

où A est connue, L a été obtenue au préalable par exemple en résolvant un problème de placement de pôles et $(M, Q = PL)$ sont choisies arbitrairement telles que M et $A - LC$ partagent les mêmes valeurs propres et M soit Hurwitz Metzler. Bien qu'elle soit facile à mettre en œuvre et propose une solution unique dans le cas où M et A ont des valeurs propres distinctes, cette méthode repose sur un choix *a priori* des matrices M et Q . Il n'est pas exclu que ce choix impacte sur les résultats de manière inadéquate. L'approche proposée dans cette section ne repose pas sur un tel choix, les matrices P et L (donc M) étant simultanément fournies au terme de la synthèse. Cet avantage se paie par la perte de la garantie de globalité de la solution, l'algorithme d'optimisation utilisé ne fournissant qu'une garantie locale.

6.3 Formulation du sous-problème (a) comme problème de stabilisation

Les matrices P et L étant les variables de décision, on définit $M = P(A - LC)P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. D'après la définition 1 il est possible de garantir que la matrice M soit Metzler en s'assurant que les $n(n - 1)$ inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\forall i \neq j, M_{ij} = [P(A - LC)P^{-1}]_{ij} = d_i^\top P(A - LC)P^{-1}d_j \geq 0 \quad (12)$$

où les vecteurs colonnes d_i et d_j sont définis par $d_i = (\delta_{ik})_{1 \leq k \leq n}$. Pour une paire d'entiers (i, j) tels que $i \neq j$, le fait d'assurer l'inégalité (12) peut être considéré comme un problème de déstabilisation en les variables de décision P et L . En considérant $-M_{ij}$ plutôt que M_{ij} lors de la synthèse, on se ramène à un problème de stabilisation d'un système fictif sans entrée ni sortie ayant $-M_{ij} \in \mathbb{R}$ pour matrice d'état.

6.4 Problème de synthèse

Pour déterminer (P, L) satisfaisant au problème 1, nous devons répondre au problème de base (a) auquel nous avons ajouté des contraintes de contrôle comme le sous-problème (b). Nous proposons d'utiliser une approche par optimisation non lisse telle que présentée dans [11]. Cette technique a été conçue pour la synthèse multi-modèles de contrôleurs structurés.

Dans un premier temps, nous reformulons les inéquations (12) comme des contraintes de stabilité. Celles-ci s'appliquent aux $n(n-1)$ systèmes fictifs suivants :

$$\forall i \neq j, G_M^{ij} = \left[\begin{array}{c|c} -M_{ij}(P, L) \in \mathbb{R} & \mathbf{0}_{n \times 0} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times 0} \end{array} \right] \quad (13)$$

Le fait d'assurer $\forall i \neq j, M_{ij} \geq 0$ est équivalent à assurer la stabilité du système fictif correspondant.

Pour résumer, la prise en compte des contraintes de synthèse se fait par l'intermédiaire des ensembles de modèles suivants :

- (C1) $n(n-1)$ modèles fictifs unidimensionnels $\{G_M^{ij}\}_{i,j}$ sur lesquels on formule une contrainte sur la position du pôle;
- (C2) (*optionnel*) $n(n-1)$ modèles fictifs unidimensionnels $\{\bar{G}_M^{ij}\}_{i,j}$ avec matrice d'état égale à $M_{ij}(P, L) - M_{ij}^{\max}$ et contrainte sur le pôle. Pour $0 < M_{ij}^{\max} < +\infty$, la considération de ces contraintes permet de réduire l'ensemble des solutions et améliore la convergence de l'algorithme;
- (C3) modèle d'origine $G = (A, B_u, C, D_\Phi)$ augmenté d'un observateur classique avec contrainte sur la qualité d'estimation permettant de vérifier (b);
- (C4) (*optionnel*) tout autre modèle permettant la formulation de contraintes de synthèse additionnelles.

L'algorithme de synthèse H_∞ par optimisation non lisse (voir section 5) est ensuite exécuté sur une sélection de ces modèles et contraintes.

7 Exemples

Nous considérons des exemples fournis dans la littérature. L'objectif est de synthétiser un observateur par intervalles selon le formalisme présenté dans la section 3. Les synthèses sont effectuées en utilisant la fonction `systeme` de la *Robust Control Toolbox 2014b* [13].

7.1 Système du 3^e ordre avec mode inobservable

Avec ce premier exemple, on va considérer la viabilité de notre approche pour synthétiser des matrices P et L telles que $P(A-LC)P^{-1}$ soit Metzler. L'utilisation d'un observateur par intervalles sera illustrée dans l'exemple suivant. On considère le système proposé dans [6] et donné par la représentation d'état suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (14)$$

On remarque que le mode $-4 \pm \mathbf{j}\sqrt{3}$ est stable mais inobservable. Pour résoudre ce problème, on considère les ensembles de modèles (C1) et (C2) avec $n = 3$ et $\forall(i, j), M_{ij}^{\max} = 10$. En utilisant un modèle additionnel (C4), on peut également s'assurer que la valeur propre réelle de la matrice $A-LC$ soit contenue dans l'intervalle $[-10, -3.10^{-3}]$. Une solution est obtenue en moins de 5 itérations après 3 tentatives. On obtient les résultats suivants :

$$M = \begin{bmatrix} -2.0764 & 1.5488 & 0.0611 \\ 0.2614 & -2.4897 & 9.8946 \\ 0.6941 & 0.0094 & -3.8150 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1.0991 & -0.6915 & -0.7497 \\ 0.7811 & 1.7077 & 0.1462 \\ 0.2593 & -0.2680 & 0.2964 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2.3811 \\ 0.3125 \\ -1.2164 \end{bmatrix} \quad (15)$$

On constate que M est bien Hurwitz Metzler et que $M = P(A-LC)P^{-1}$.

7.2 Système du 6^e ordre avec deux modes complexes

On s'inspire ici de l'exemple théorique présenté dans [5]. Les équations du modèle sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ y &= x_1 + \Phi(t) \end{cases} \quad (16)$$

où $x \in \mathbb{R}^6$, $u(t) = \sin(t)$ et $\Phi(t)$ est une perturbation bornée telle que $\forall t$, $-2 \leq \Phi(t) \leq 1$. En simulation, on utilisera un générateur de nombres aléatoires compris entre ces bornes. La représentation d'état de ce système est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -18 \\ 0 & -13 \\ 0 & -5 \\ 0 & -4 \\ 0 & -10 \\ 0 & 22 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], D = [1 \ 0] \quad (17)$$

Pour reprendre le formalisme de la section 3, on a donc $D_\Phi = 1$. Pour résoudre ce problème, on considère les ensembles de systèmes **(C1)** et **(C2)** avec $n = 6$ et $\forall(i, j)$, $M_{ij}^{\max} = 1.10^2$. En ce qui concerne la qualité d'estimation, son évolution temporelle est donnée par le système :

$$\dot{e} = (A - LC)e - L\Phi(t) \quad (18)$$

En utilisant ce modèle au sein de **(C3)**, on assure $\|\frac{1}{0.4}T_{\Phi \rightarrow e}(s)\|_2 \leq 1$. En utilisant **(C4)**, on peut également garantir le positionnement des valeurs propres de $A - LC$ dans l'intervalle $[-10, -3.10^{-3}]$. La solution de l'Eq. (19) est obtenue en 1152 itérations après 4 tentatives:

$$M = \begin{bmatrix} -1.3668 & 5.9193 & 0.7305 & 9.8546 & 0.9143 & 0.0009 \\ 0.0000 & -4.9090 & 2.3299 & 0.4740 & 0.2755 & 0.0033 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.1835 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0342 \\ 0.0001 & 1.2664 & 0.0205 & -3.7173 & 0.0413 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0000 & 100.0000 & 11.3521 & -1.6276 & 0.0001 \\ 0.1182 & 0.0024 & 0.0842 & 0.1855 & 0.0004 & -0.9917 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 8.2319 & -2.6167 & 5.8614 & -6.6858 & -3.8411 & 5.6746 \\ -0.2326 & 0.3483 & -0.4185 & -0.1711 & -0.3658 & -0.1968 \\ 0.0417 & 0.0099 & 0.0422 & -0.0444 & -0.0235 & 0.0604 \\ 0.3634 & -0.1244 & 0.3408 & 1.0045 & 0.5097 & -0.4437 \\ -0.9431 & 3.6883 & -5.2440 & -1.4958 & -1.0492 & -1.8893 \\ -1.8051 & -0.7830 & -1.0226 & 1.3693 & 0.7206 & -0.6865 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -0.2042 \\ 0.0555 \\ -0.2549 \\ -0.0552 \\ -0.2781 \\ -0.1274 \end{bmatrix} \quad (19)$$

On implémente alors un observateur par intervalles tel que présenté dans la section 3. Un encadrement de l'état x du système est donné par l'Eq. (9).

On effectue une simulation en initialisant le système à

$$x_0 = [20 \ 10 \ 6 \ 20 \ 30 \ 40]^\top$$

et l'observateur à $\hat{x}_0 = 0$. La perturbation est simulée grâce à un générateur de nombres aléatoires (voir Fig. 1). On a représenté les états et leurs estimées sur la Fig. 2. Sur la Fig. 3, on a représenté les bornes fournies par l'observateur par intervalles ainsi que les états obtenus après 25 simulations successives en initialisant x_0 aléatoirement entre les deux bornes $\underline{x}_0 = -[50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50]$ et $\bar{x}_0 = -\underline{x}_0$ et en modifiant la graine du générateur aléatoire définissant Φ . On constate que malgré une erreur initiale importante, l'observateur par intervalles converge rapidement vers l'état. Il persiste un intervalle d'encadrement non nul compte tenu de la présence de la perturbation inconnue Φ , que nous avons prise en compte dans la conception de l'observateur (6) *via* ses bornes connues ($\underline{\Phi} = -2, \bar{\Phi} = 1$).

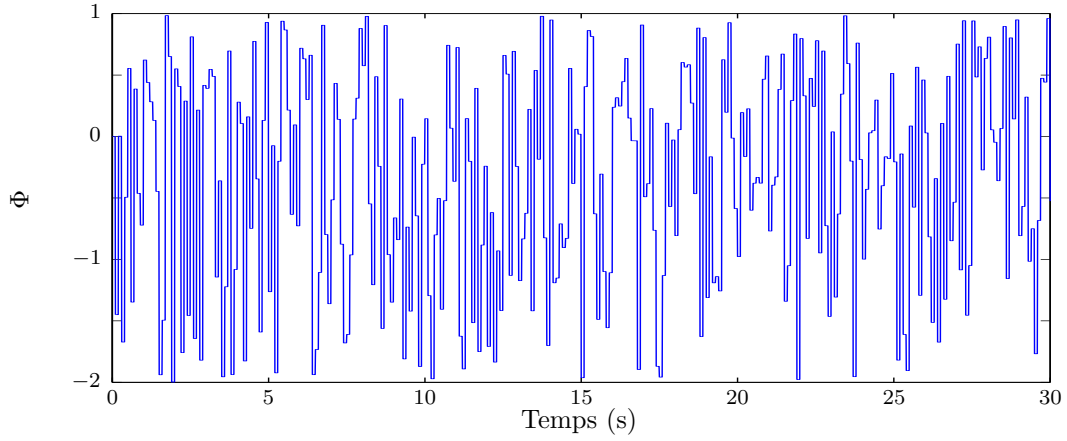


Figure 1: Exemple de perturbation $\Phi(t)$ de la mesure.

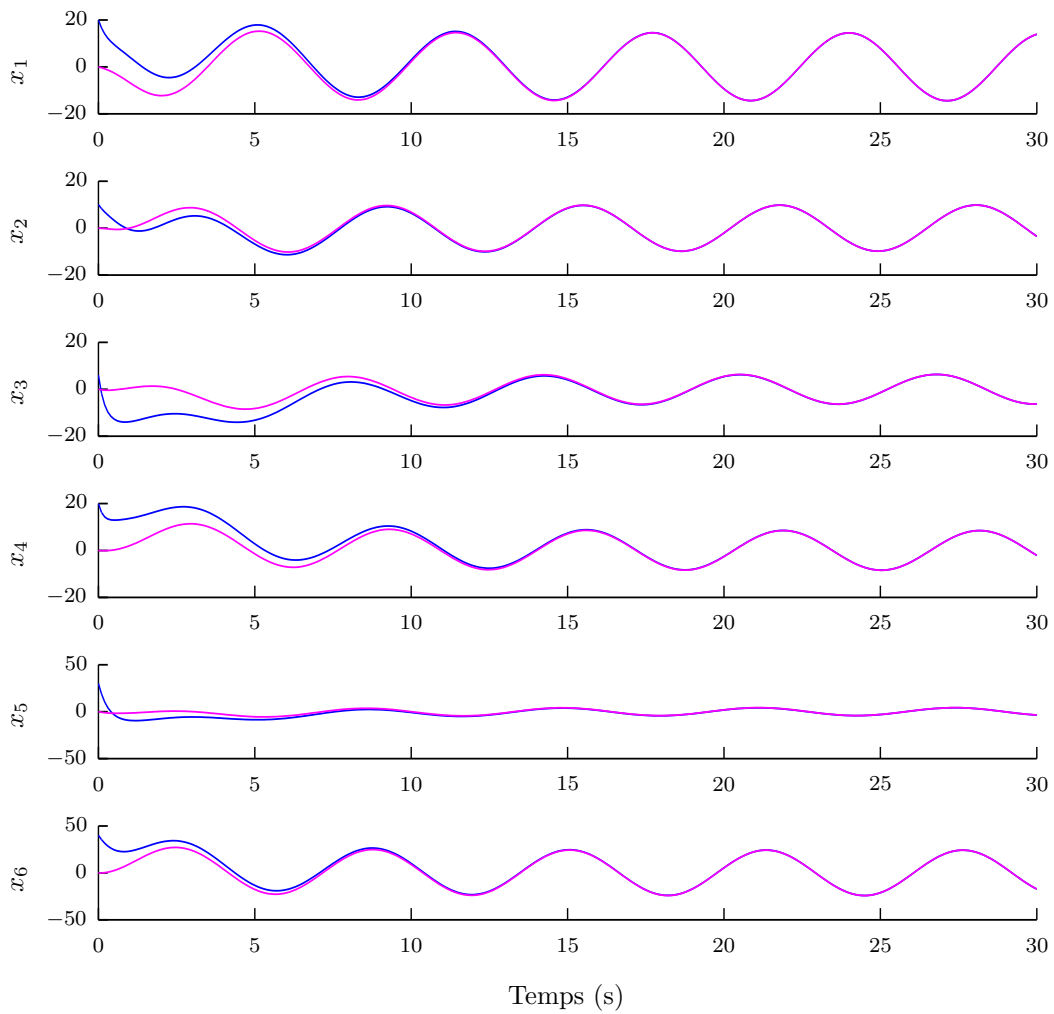


Figure 2: Observateur classique (en magenta) des états du système (17).

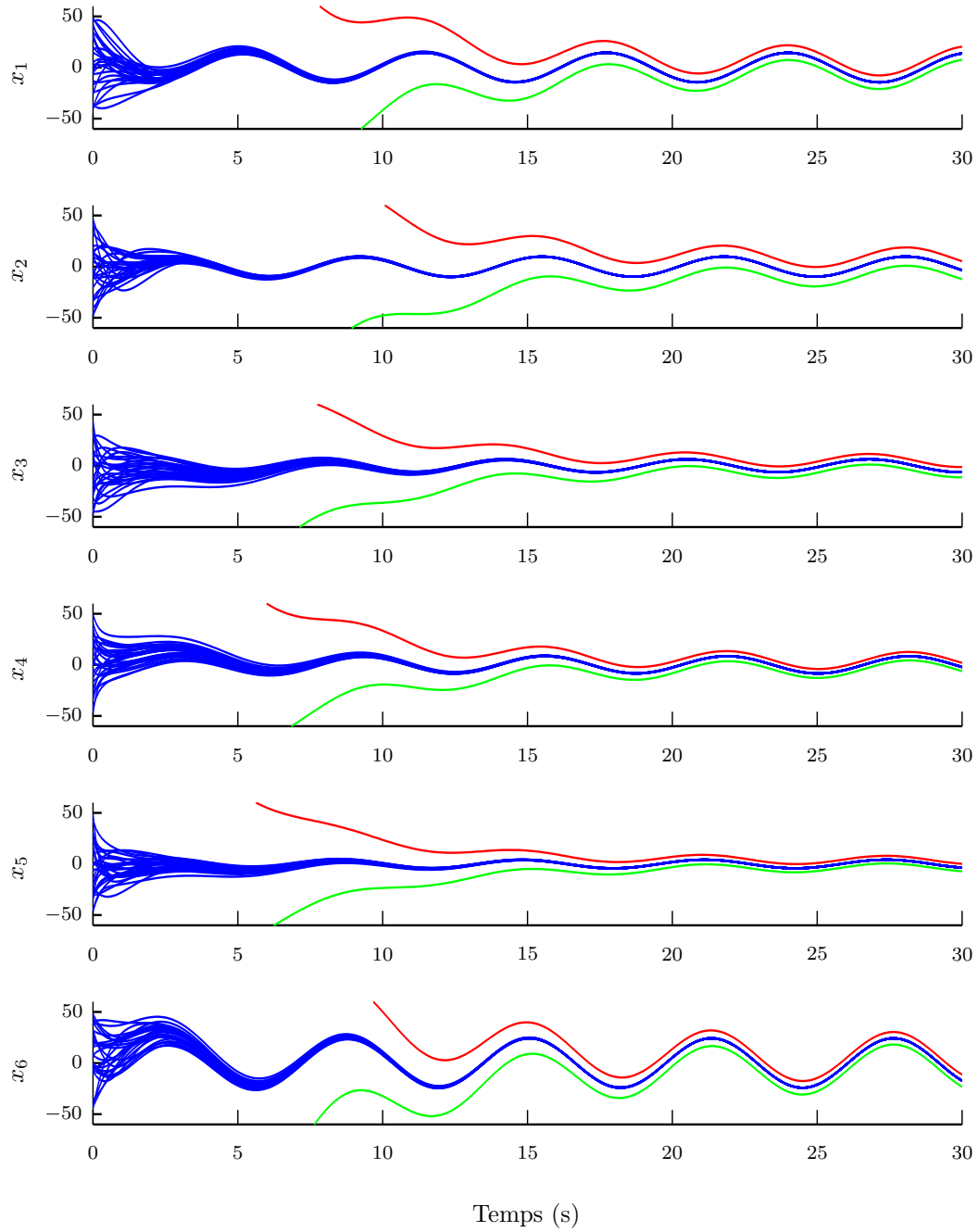


Figure 3: Observateur par intervalles (bornes en rouge et vert) des états du système (17) (25 simulations).

8 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une application de techniques d’optimisation non lisse [11] à la détermination numérique d’une matrice de transformation combinée à un problème de contrôle. En reformulant les inégalités (12) comme un problème de stabilisation des systèmes fictifs (13), nous avons rendu possible l’utilisation de techniques habituellement réservées à la synthèse de lois de commande. L’avantage de cette méthode est de synthétiser simultanément les matrices P et L telles que $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Hurwitz Metzler. Cet avantage se paie par la perte de la garantie de globalité de la solution numérique obtenue.

Cette technique a été appliquée avec succès à deux exemples tirés de la littérature. Dans le cas du deuxième exemple nous avons utilisé le formalisme des observateurs par intervalles développé dans [5], [6] et [8] (et rappelé dans la section 3) pour obtenir un encadrement de l’état du système en présence d’une perturbation inconnue sur la mesure.

Les perspectives d’amélioration de notre méthode sont multiples. En l’état actuel, l’approche proposée reste complexe en terme de capacités de calcul nécessaires. Pour remédier à cela, nous pourrions envisager la création d’un algorithme dédié pour résoudre le problème 1. Par ailleurs, nous nous sommes placés ici dans le cas d’un système parfaitement connu et indépendant du temps. Il pourrait être envisagé de résoudre le même problème en considérant un système incertain ou dépendant d’un paramètre variant $\theta(t)$.

References

- [1] H. L. Smith, “Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 33, no. 2, pp. 203–209, Apr. 1996. [p. 1]
- [2] L. Mailleret, “Stabilisation globale des systèmes positifs mal connus - applications en biologie,” Ph.D. dissertation, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, May 2004. [p. 1]
- [3] J. L. Gouzé, A. Rapaport, and M. Z. Hadj-Sadok, “Interval observers for uncertain biological systems,” *Ecological Modelling*, vol. 133, no. 1-2, pp. 45–56, 2000. [p. 1]
- [4] F. Mazenc and O. Bernard, “Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 2, pp. 523–527, Feb. 2010. [p. 1]
- [5] —, “Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances,” *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 140–147, 2011. [pp. 1, 2, 7, and 10]
- [6] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri, “Interval state estimation for a class of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 1, pp. 260–265, Jan. 2012. [pp. 1, 2, 3, 5, 6, and 10]
- [7] D. Efimov, T. Raïssi, and A. Zolghadri, “Control of nonlinear and LPV systems: Interval observer-based framework,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 3, pp. 773–778, Mar. 2013. [p. 1]
- [8] T. N. Dinh, F. Mazenc, and S.-I. Niculescu, “Interval observer composed of observers for nonlinear systems,” in *Proc. of the European Control Conference*, Strasbourg, France, Jun. 2014, pp. 660–665. [pp. 1, 2, 3, and 10]
- [9] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton, “HIFOO – a MATLAB package for fixed-order controller design and H_∞ optimization,” in *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Aug. 2006. [p. 2]
- [10] P. Apkarian and D. Noll, “Nonsmooth H_∞ synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, Jan. 2006. [p. 2]

- [11] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr, “Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers,” in *Proc. of the 13th European Control Conference*, Strasbourg, France, Jun. 2014, pp. 856–861. [pp. 2, 4, 5, and 10]
- [12] P. Gahinet and P. Apkarian, “Frequency-domain tuning of fixed-structure control systems,” in *Proc. of the UKACC International Conference on Control*, Sep. 2012, pp. 178–183. [p. 4]
- [13] MATLAB, *Robust Control Toolbox version 5.2 (R2014b)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2014. [p. 6]